60 -61

Amélie DUBOUQUET

et

Lucienne FÉLIX

l'école nouvelle française

L'Unité des Mathématiques et de leur Enseignement

ÉCOLE NOUVELLE FRANÇAISE

PARIS

AVANT-PROPOS

On sait que l'Ecole Nouvelle Française *avait consacré un de ses stages à l'enseignement, ou, pour parler mieux, à l'apprentissage du calcul, et on sait la part qu'avait prise à ce stage M. Mialaret, dont les travaux font aujourd'hui autorité en cette matière. Et nos lecteurs n'ont pas oublié le numéro (n° 38) de notre revue qu'il a consacré à ce sujet. Mais le champ est vaste, et les difficultés y sont grandes. Après Mialaret, après Hotyat, et (il ne faut pas l'oublier) après Piaget, il y a encore du travail à faire. Le présent numéro, dans lequel notre amie A. Dubouquet et Mlle Félix, professeur de mathématiques, nous apportent les résultats de leur expérience et les fruits de leur réflexion, apporte à la position et à la solution de cet important problème pédagogique une contribution de grande valeur.*

R. C.

L'unité des mathématiques et de leur enseignement

Amélie DUBOUQUET et Lucienne FÉLIX

TABLE

PREMIERE PARTIE

LES MATHÉMATIQUES DANS LEUR UNITÉ

Lucienne FÉLIX

Une étude sur l'enseignement des mathématiques aux jeunes enfants doit prendre en considération la psychologie de l'enfant, les observations pédagogiques, mais aussi la nature même de la science à enseigner.

Méthodes actives, appel aux facultés créatrices de l'enfant, mais pour aboutir à quoi ? Il ne s'agit plus seulement, dans notre monde moderne, de faire acquérir à l'enfant les rudiments de lecture, d'écriture et de calcul : par le moyen de la lecture, de l'écriture, du calcul, du dessin, il lui faudra devenir apte à comprendre le monde où il vivra et à y remplir son rôle.

On exige donc beaucoup de l'enfant, mais il peut accéder au niveau nécessaire parce qu'il est baigné par la civilisation moderne, qu'il participe à cette vie et que, d'autre part, la science elle-même a dû changer d'aspect et, même dans ses fondements, a dû s'adapter aux conditions nouvelles qu'elle a elle-même provoquées.

La mathématique a cessé d'être un jeu de spécialistes. Elle n'est pas une collection de curiosités concernant les nombres et les figures. La science a su dégager les notions fondamentales qui permettent de construire ces nombres, cet espace avec toutes leurs propriétés, mais aussi de faire d'autres constructions telles que l'exigent les physiciens, et même les sciences sociales, puisqu'elle a su s'adapter à la statistique et à la probabilité.

Les situations les plus variées se prêtent par certains aspects à des interprétations mathématiques. En particulier, les notions mathématiques fondamentales sont évidentes dans les expériences, les manipulations que fait l'enfant. Les reconnaître et en prendre conscience, c'est être initié aux lois de la logique. Le mathématicien anglais Boole a mis en évidencce l'existence d'une algèbre de la pensée (The Laws of Thought). Cette pensée s'exprime dans la langue et se révèle par la grammaire.

Pourquoi cette vérité n'avait-elle pas été exploitée ? Si simple, si évidente, elle pouvait rester implicite tant que les mathématiques étaient œuvres d'adultes accoutumés à la pensée logique. Mais, faute de réflexion sur les fondements des mathématiques, comment guider les premiers pas de l'enfant ? Nous comptons sur « le don », « la bosse des math ». Et l'on n'enseigne explicitement qu'une technique morte, l'essentiel restant inexprimé.

Cet inexprimé fondamental, c'est ce qu'on nomme les *structures mathématiques*. Au départ il y en a très peu ; elles sont très simples, mais si indispensables et si puissantes qu'elles permettent de construire toutes les mathématiques élémentaires, aussi bien l'arithmétique et l'algèbre que la géométrie et les autres chapitres traditionnellement mais artificiellement séparés ; leur apprentissage commencé dans le plus jeune âge se poursuit toujours avec continuité : c'est en cela que consiste l'unité de la mathématique et de son enseignement.

STRUCTURES FONDAMENTALES

Sans pouvoir évidemment faire un exposé complet, même élémentaire, nous allons prendre quelques exemples.

La structure traduite par le signe =

Dès le début de l'étude du calcul, on utilise le signe que nous lisons « égal ». Naturellement, il n'est pas question d'en donner à l'enfant une définition logique, mais le maître ne doit-il pas avoir conscience des conditions dans lesquelles il a le droit de l'employer ! C'est que, hélas ! on le voit dans les circonstances les plus étranges : Dans une gare des environs de

Paris n'ai-je pas lu : « Voie n° 3 = Paris ». Ne doit-on pas donner à l'enfant, dès le début, les bonnes habitudes qu'il utilisera toute sa vie ? N'est-ce pas le moyen d'éviter les difficultés bien connues à l'entrée des classes secondaires ?

Le signe = traduit ce que nous nommons « *une relation d'équivalence* ». C'est ce que le langage traduit par la phrase : « Au point de vue considéré, cela m'est égal d'avoir ceci ou cela, de dire ceci ou cela. »

Par exemple, je m'intéresse à la couleur mais non à la nuance. Tel objet est-il bleu ? oui ou non ? Je dois pouvoir répondre sans ambiguïté. Voici un livre, et un crayon à bille, et un ruban ; ce sont trois objets bleus. Quelles sont les idées qu'exprime le terme grammatical « le même » ? Ici, « la même couleur »?

1) Je montre le livre, puis encore le livre. Vous me direz naturellement : « C'est la même couleur. »

2) Je montre le livre, *puis* le crayon, et vous dites : « C'est la même couleur. » Si maintenant je montre *d'abord* le crayon et ensuite le livre, vous direz encore : « Oui, c'est la même couleur. » L'ordre n'importe pas.

3) Cette fois, je montre le livre, puis le crayon : « Oui, c'est la même couleur » ; et ensuite je montre le crayon, puis le ruban : « Encore oui. » Alors, si je montrais le livre, puis le ruban ? : « Oui, naturellement. » Cette permanence qui fait ainsi passer de proche en proche jusqu'au dernier objet : c'est ce qu'on nomme la *transitivité* de la relation.

La première condition examinée, permanence de la qualité pour le même objet, se nomme la *réflexivité* de la relation (elle se réfléchit sur elle-même).

La deuxième condition examinée assurant que l'ordre des éléments comparés n'importe pas se nomme la *symétrie* de la relation. C'est seulement pour parler, pour écrire, que l'on doit considérer un des éléments comme le premier, l'autre comme le le second.

Ainsi, nous avons reconnu les trois conditions : *réflexivité*, *symétrie*, *transitivité*. Faut-il d'autres conditions ? Eh bien !

non, c'est tout. Ce sont les trois conditions qui caractérisent ce qu'on nomme « *une relation d'équivalence* ». Alors, et alors seulement, on a le droit d'utiliser le symbole $=$ ou un symbole qui lui ressemble, tel que $\equiv$ ou $\backsim$

Ces conditions, plus ou moins consciemment, la maîtresse de jardin d'enfants les enseigne au cours d'exercices sensoriels à propos de couleurs, de longueurs, de nombres. Mais il faut une prise de conscience enrichie pour appréhender la structure logique et mathématique et la reconnaître là où elle est : nous la verrons plus loin à propos des nombres et des structures géométriques.

Relations d'ordre

Par opposition à la relation d'équivalence, on songe immédiatement à la relation que traduit le comparatif « plus que » et son inverse « moins que ». Par exemple « plus long que », « plus foncé que », etc. A quelles conditions peut-on utiliser une telle expression ? Elle indique ce que le mathématicien appelle « *une relation d'ordre* », relation caractérisée par les trois conditions.

non réflexivité, *non symétrie*, mais *oui, transitivité.*

$a < a$ est faux

($a < b$ vrai) entraîne ($b < a$ faux) (l'ordre importe)

mais ($a < b$ et $b < c$) entraîne $a < c$

Au lieu de cette relation *d'ordre strict*, on doit souvent utiliser la relation *d'ordre large* traduite par « au moins », par exemple « au moins aussi long », « au moins égal à 3'', etc. Ainsi :

$a \leqq a$ est exact (réflexivité)

($a \leqq b$ et $b \leqq a$) sont compatibles car on accepte $a = b$

($a \leqq b$ et $b \leqq c$) entraine $a \leqq c$ (transitivité)

Ainsi, relations d'équivalence et relations d'ordre, tels sont les deux types fondamentaux de relation. Si l'on y pense, on les retrouve dans les situations les plus variées. En particulier, la logique qui nous fait dire « si A est vrai, alors B est vrai » se traduit par $A \Rightarrow B$ « A entraîne B ».

On s'assurera que la relation indiquée par le signe $\Rightarrow$ est une relation d'ordre large. C'est ce qui permet les chaînes de déductions, les schémas logiques si comparables aux arbres généalogiques puisque dans les deux cas on matérialise par le dessin des relations d'ordre.

Les ensembles

Mais l'on demande peut-être : « Enfin, de quoi parlons-nous ? les mathématiques ne sont donc pas l'étude des nombres et des figures ? » — « Non, pas exclusivement. C'est avant tout l'étude des relations, des opérations. » — « Mais des relations entre quoi ? des opérations sur quoi ? » — « Eh bien ! sur des choses, des êtres, des *éléments* comme nous disons. Ces éléments peuvent être les objets d'un matériel, mais aussi des êtres abstraits comme des nombres, des lignes, des couples de points, ou encore des équations, des fonctions, des déplacements, des propositions logiques... bref des ensembles de toutes sortes d'éléments. Seulement, pour que ces collections soient objets de sciences, il faut préciser : c'est l'objet de la *Théorie des Ensembles*, chapitre fondamental des mathématiques d'aujourd'hui.

Nous devons parler d'un *ensemble d'éléments* que l'on nommera l'*ensemble de référence :* tout élément doit être reconnu comme *appartenant* à l'ensemble ou non : par exemple, si des objets sont sur une table, l'enfant a la notion de l'ensemble des billes si, montrant un objet, il sait dire sans se tromper : « Oui, c'est une bille » ou « Non, ce n'est pas une bille. »

« b *appartient* à B » s'écrit $b \in B$.

Le symbole $\in$ rappelle l'epsilon, initiale du verbe grec signifiant « être ». « Socrate est un homme » signifie en réalité « Socrate est un élément de l'ensemble des hommes. » Notons que nous mettons une minuscule pour un élément, une majuscule pour l'ensemble, car des idées différentes doivent être symbolisées différemment. Si l'on désire parler de l'ensemble des sacs de billes, sacs notés B, nous mettrions par exemple $\mathcal{B}$

$b \in B$, $B \in \mathcal{B}$: il y a montée dans l'échelle des types.

Exemple : un élève ; une classe, ensemble d'élèves ; une école, ensemble de classes.

Mais parmi les billes, considérons celles qui sont rouges. Elles forment le *sous-ensemble* R qui est *inclus* dans B. On écrira $R \subset B$. Il n'y a pas montée dans l'échelle des types. On verra sans peine que la *relation d'inclusion* est une relation d'ordre. Quant à l'ensemble des billes qui ne sont pas rouges, elles forment le *sous-ensemble complémentaire* de R, noté $\complement R$. On montre ceci sur un schéma.

Ensuite, je peux considérer une autre qualité, par exemple, être en verre : les billes en verre forment un sous ensemble V. Le schéma montre alors le sous-ensemble formé par les billes qui sont *à la fois* rouges *et* en verre : former ce sous-ensemble à partir de R et de V, c'est faire une *opération* dans l'ensemble des sous-ensembles de E, opération nommée *intersection* et notée $R \cap V$; elle correspond à la conjonction *et* entre les conditions imposées.

Evidemment l'on songe à une autre opération, celle qui correspond à la conjonction *ou*. On s'intéresse surtout à l'idée non exclusive : prendre les billes rouges, *ou* en verre, *ou à la fois* rouges et en verre. Cette opération se nomme la *réunion* de R et V ; on la note $R \cup V$.

Evidemment, l'intersection de R et V donne un sous-ensemble inclus dans la réunion $(R \cap V) \subset (R \cup V)$.

Grâce à la prise des complémentaires, on saura noter « l'ensemble des perles rouges qui ne sont pas en verre », « l'ensemble des perles qui ne sont ni rouges ni en verre », etc., et les montrer sur le schéma.

Les opérations $\cap$ et $\cup$ ont des propriétés : par exemple : $A \cap B = B \cap A$, $\cup\ A \quad B = B \cup A$: l'ordre n'importe pas : les opérations sont *commutatives*.

Comment ne pas penser aux opérations d'addition et soustraction sur les nombres ? Mais avant de faire des problèmes sur les nombres de billes rouges et de billes en verre, il faut avoir compris comment utiliser ces sous-ensembles.

La théorie des ensembles conduit à une algèbre à trois opérations $\complement$, $\cap$, $\cup$. C'est l'algèbre de la logique des trois opérations non, et, ou.

Les quantificateurs

Mais cette algèbre est insuffisante. Dire « b est une bille rouge » est peu intéressant en général, mais voici deux phrases bien plus puissantes et précises :

1) Toute bille b est rouge

on écrit $\forall$ b, b ε R

2) Il existe au moins une bille qui soit rouge

$\exists$ b : b ε R

Les deux signes $\forall$ et $\exists$ qui disent de quelle quantité d'éléments je parle sans en préciser le nombre sont dits les *quantificateurs*

$\forall$: *quantificateur universel* et $\exists$ *quantificateur existentiel.*

Nous venons d'introduire bien des mots techniques, bien des symboles ! mais il faut songer que c'est tout ce qui est nécessaire pour l'enseignement des mathématiques jusqu'à la fin de l'enseignement secondaire (avec les signes classiques +, —, ×, : et quelques signes spéciaux pour chaque technique).

Quel jour faut-il introduire tel ou tel signe ? Le maître le sentira bien : c'est le jour où l'enfant prend conscience de la notion, où il a besoin de la nommer, de la noter parce qu'il commence à se familiariser avec elle, qu'il la reconnaît et qu'il a besoin de l'exprimer.

Si l'on a présent à l'esprit ces structures, on les retrouve partout : les situations que le matériel du jardin d'enfant suggère, que les énoncés de problèmes expriment peuvent être décrites en termes d'ensembles, de relations d'équivalence ou d'ordre, d'opérations d'intersection et de réunion et aussi de correspondance entre divers ensembles. Mais rien n'est précis sans les quantificateurs. Après cet aperçu de ce que sont les premiers chapitres des mathématiques d'un point de vue moderne, il nous reste à en tirer quelques conclusions.

Tout d'abord, nous comprenons en quel sens nous pouvons parler de l'unité des mathématiques : qu'il s'agisse d'ensembles savants, tels que l'ensemble des intégrales d'une équation aux dérivés partielles, ou d'un humble ensemble de cubes, l'étude consiste toujours à prendre conscience des structures qu'y apportent les relations (relations d'équivalence, relations d'ordre) et les opérations qu'on y définit, donc de la structure de ces ensembles de relations et d'opérations.

La possibilité d'une unité dans l'enseignement en résulte : faire prendre conscience progressivement des structures que font apparaître les manipulations manuelles, puis s'exercer à ce que nous pouvons appeler les manipulations mentales : ce sont les structures logiques elles-mêmes dont on fait ainsi l'apprentissage.

Alors apparaît bien l'immense responsabilité du maître chargé du premier enseignement ; les habitudes qu'il donne, le vocabulaire et le symbolisme écrit qu'il propose ou tolère imprègnent l'enfant d'une façon définitive. Le maître est juge du moment où il doit introduire une notion, la traduire par un mot, par un signe, mais nous le supplions de n'employer les mots que dans un sens correct, d'utiliser les symboles suivant le code officiel et définitif que l'élève devra utiliser toute sa vie. Comme, de lui-même, l'enfant moderne qui écrit a besoin de signes rapides et qu'il invente des abréviations personnelles confuses et dangereuses, c'est le rôle du maître de lui fournir au moment propice le signe utile, adopté universellement et d'imposer son emploi légitime.

Si le maître pense pour lui-même suivant les formes correctes, il saura enseigner, car il sera convaincu de la simplicité et de la clarté du vocabulaire nouveau qui complète et, parfois corrige, l'ancien. Il ne pourra plus se passer des quelques symboles nouveaux comme il ne peut se passer des signes classiques =, +, ×, etc., qu'il saura utiliser correctement. L'enfant l'acceptera sans peine comme il accepte tous les symboles qui l'entourent, tels que ceux du code de la route.

En conclusion, pour bien enseigner, il faut savoir ce que l'on doit enseigner. L'aspect moderne des mathématiques permet une prise de conscience simple et nette des notions fondamentales. Il permet de reconnaître ces notions dans les matériels, dans les situations de la vie courante, dans le jeu des enfants. Il rend possible un enseignement plus vivant, plus efficace, en particulier en établissant enfin la continuité de l'enseignement des mathématiques depuis le jardin d'enfants jusqu'aux niveaux les plus élevés.

Les expériences préliminaires des petits (1)

Amélie DUBOUQUET

Les premiers nombres

Les actes de la vie quotidienne soumettent l'enfant à une pratique non verbale du calcul. L'enfant se sert d'une cuillère, ou d'un gobelet, il met ses deux chaussons, il cherche ses chaussettes, il rassemble les moutons de sa bergerie, il confectionne des rangées de pâtés de sable.

Ainsi un sens global du nombre s'impose à l'enfant. En plus des objets familiers, l'enfant avec ses mains, ses pieds, ses yeux, les doigts de sa main, a en lui-même des documents généralement invariables, disposés suivant un thème géométrique puisque tout ce qui est unique *est dans l'axe du corps : un nez, une bouche, un front, une tête, etc... tout ce qui va par deux est symétriquement disposé de part et d'autre de l'axe... tels sont les mains, les jambes, les pieds, les genoux, les épaules, les oreilles, les yeux...*

Les cinq doigts des mains sont ainsi disposés qu'il est loisible de les superposer et de « pratiquer » le nombre 5 *et son double : le nombre* 10 *des dix doigts.*

Les 5 *doigts se décomposent en*

1 + 4

si l'on compte le pouce d'une part, et les 4 *autres doigts de l'autre.*

---

(1) Note : Les pages signées Amélie Dubouquet sont extraites d'un ouvrage inédit : La Pédagogie de l'objet.

En somme les nombres, 1, 2, 4, 5, 10, 15 et 20 sont concrétisés par des ensembles stables, alors que le nombre des pâtés de sable ou celui des moutons de la bergerie est une quantité indéterminée.

La notion d'indéfini, de nombre si grand que l'on ne peut le connaître est illustrée par l'ensemble des cheveux.

La richesse géométrique du modèle humain se manifeste notamment dans des aspects très variés de la symétrie :

Celle des yeux,
des oreilles,
des mains,
des pieds,
etc...

La notion d'éléments divisibles est concrétisée par le nez et ses deux narines, la bouche et ses deux lèvres. La notion d'unité donnée par la main, se relie à celle de l'ensemble des cinq doigts, de leur division en phalanges. Au nombre des doigts correspond exactement celui des ongles, d'où la notion intuitive de correspondance...

Les objets et les images

L'enfant a fait un pré-apprentissage du nombre représenté par des collections d'éléments semblables, en ramassant des cailloux, en faisant des pâtés, en cueillant des fleurs. Il a fait également des constructions géométriques avec ses cubes.

En regardant des images il a cherché à identifier des animaux à 4 pattes, des objets à 1 roue comme les brouettes, à 2 roues comme les bicyclettes, à 3 roues comme les tricycles, à 4 roues comme les charettes et les automobiles, à plus de 4 roues comme les locomotives... Il dépasse le stade de la perception globale d'un ensemble de 2, 3 ou 4 objets et commence à enregistrer et à psalmodier avec une satisfaction évidente, le début de la suite des nombres, comme s'il vérifiait l'état de ses instruments de travail, comme s'il étudiait une gamme.

Les documents écrits

Les documents écrits font la liaison entre les bases expérimentales acquises dans la pratique quotidienne et l'enseignement en partie livresque des classes primaires. L'enfant doit apprendre à utiliser tout seul et avec autant d'aisance que des objets les documents écrits. Pour cela il est nécessaire que l'enfant retrouve dans ses premiers livres les expériences qu'il a faites lui-même. De plus il est bon que l'enfant soit autorisé à faire « un retour à l'objet » chaque fois qu'il en ressent le besoin.

Le lecteur débutant reconnaitra dans des textes parfaitement à sa portée, ses jeux avec les objets, traduits par des expressions verbales et des chiffres.

La Concentration

Dès que les situations *concernant la pratique du calcul se compliquent, dès qu'elles nécessitent des* opérations, *l'enfant est obligé de faire un effort de concentration, de mobiliser ses forces intérieures, comme il s'y exerce dans le jeu. Lorsque l'enfant découvre une* méthode, *si elle ne ressemble pas à celles qui sont consacrées par l'usage, il est dangereux pour son avenir mathématique de rire de sa manière de faire.*

Même une méthode longue, compliquée, tortueuse, commande le respect si elle a représenté un effort de la part de l'enfant.

Acquisition de la sûreté

Après une pratique quotidienne du calcul et des efforts de concentration répétés, l'enfant en viendra à acquérir la sûreté.

Que faut-il entendre par la « sûreté » ? Voici la définition qu'en a donnée M. Roger Cousinet : « La sûreté est la qualité de celui qui, en présence d'un problème nouveau, utilise à la fois son intelligence et ses acquisitions antérieures, sans tâtonner, ni prendre de fausses directions et découvre exactement la voie au bout de laquelle il trouvera la solution ».

DEUXIEME PARTIE

NOMBRE, ESPACE, LOGIQUE

L. FÉLIX

CHAPITRE I : Le nombre.

L'on ne peut nier qu'un des objets essentiels des mathématiques soit l'étude des nombres et de la façon de les utiliser. Maintenant que nous avons conscience des structures fondamentales, nous pouvons faire l'esquisse d'une réponse aux questions : Qu'est-ce qu'un nombre ? Qu'est-ce qui caractérise l'ensemble des nombres ?

1. *Le nombre naturel :* c'est le nombre entier attaché à une collection d'objets.

Quand l'enfant a-t-il, par exemple, la notion du nombre *trois ?* Quand il sait reconnaître dans l'ensemble des collections celles qui conviennent : trois œufs peuvent être mis dans trois coquetiers, posés sur trois assiettes, donnés à trois personnes : chaque œuf correspond à un coquetier et réciproquement, chaque coquetier à une assiette et réciproquement : il y a *correspondance biunivoque* (univoque dans les deux sens) entre les ensembles : ceci définit entre les ensembles une *relation d'équivalence* (réflexivité, symétrie, transitivité). On dit alors que les ensembles sont *équivalents en nombre* et un symbole représentera tous les ensembles équivalents en nombre : un mot (trois), un signe (3), et ce symbole *est* le nombre naturel.

Quelle est la structure de l'ensemble des nombres naturels ? L'expérience vieille comme l'humanité a mis en évidence une *structure d'ordre* $1 < 2 < 3 < 4$...

de plus l'ensemble des *nombres est infini :* après un nombre entier il y en a toujours un autre.

Enfin des opérations sont introduites : *addition* et *multiplication* avec des structures analogues.

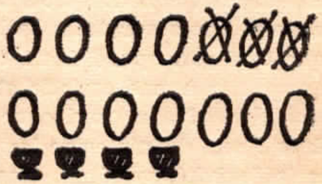
$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$ (*commutativité*)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (*associativité*)

Mais quand les deux opérations réagissent l'une sur l'autre, la multiplication est plus forte et peut « briser » l'addition :

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (*Distributivité* de la multiplication sur l'addition).

Remarque. Si le lecteur veut bien étudier à ce point de vue, dans l'ensemble des sous-ensembles de E les deux opérations $\cap$ et $\cup$, à l'aide de schémas et de couleurs, il aura la surprise d'une double distributivité de chaque opération sur l'autre : c'est, en logique, la réaction mutuelle du *et* et du *ou*.

Opérations inverses : soustraction et *division*. Le fait que les deux opérations, addition et multiplication, sont commutatives n'empêche pas que, dans bien des situations, les deux nombres introduits ne jouent pas le même rôle parce qu'ils sont relatifs à des ensembles différents. Voici, par exemple, trois situations conduisant à la même soustraction abstraite à partir de $3 + 4 = 4 + 3 = 7$.



1) J'avais 7 œufs. J'en ai mangé 3. Combien en reste-t-il ?

$7 - 3 = 4$ *il reste* 4 œufs

2) Pour placer 7 œufs, je n'ai que 4 coquetiers. Combien *manque-t-il* de coquetiers ?

$7 - 4 = 3$ *il manque* 3 coquetiers.

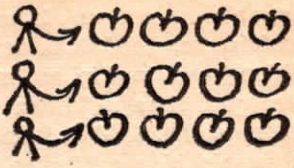
2 bis) Même situation décrite autrement : la question est : combien ai-je *d'œufs* en trop ?

$7 - 4 = 3$ j'ai 3 œufs *en trop.*

Il s'agit ici de réaliser la correspondance biunivoque. Pour la division, il s'agit de réaliser une correspondance plus compliquée qui est la proportionnalité :

1) J'ai 12 pommes. Chaque enfant en reçoit 4. Combien d'enfants sont servis ?

2) J'ai 12 pommes. Je les distribue également à 3 enfants. Combien chaque enfant reçoit-il de pommes ?



Si j'avais eu 14 pommes, il en serait resté 2.

$14 = (4 \times 3) + 2.$

Dans le premier cas, je pourrai les donner à un 4e enfant. Dans le deuxième cas, je pourrai les donner en plus à deux des enfants.

Les fractions. Si j'avais eu 14 mètres d'étoffe à partager en 3 parts égales, l'opération n'aurait pas eu de reste ; si je dis les mêmes mots « je divise par 3 », jemploie les mots dans un sens différent.

C'est bien pis si je dis que « prendre les 3 quarts » de mes 14 mètres, c'est multiplier par $\frac{3}{4}$ ». Qu'est-ce donc pour moi que « multiplier » ? et $\frac{3}{4}$ est-il donc un nombre ?

Donnons seulement ici les réponses à ces questions :

Non $\frac{3}{4}$ n'est pas un nombre. Mais au point de vue de la *mesure*, je suis conduit à considérer comme *équivalents* des *couples de nombres* tels que $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{9}{12}\right)$ couples nommés *fractions*. Toutes les fractions équivalentes correspondent à *un être* abstrait représenté au choix par $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, 0,75. On accepte le signe = pour noter cette équivalence et l'on dit que cet être abstrait est encore *un nombre*. Pourquoi ?

Parce que nous munissons cet ensemble des relations et des opérations qui lui donnent *une structure* analogue à celle de l'ensemble des entiers : la mesure des longueurs, des poids, des capacités etc. conduit à introduire une relation d'ordre, une addition, une multiplication ayant les propriétés habituelles. (Noter que, si la définition de multiplication par un entier est toute naturelle, la définition de la multiplication par une fraction semble bien arbitraire ! Elle est acceptable parce qu'elle assure la structure désirée).

Les formules déjà écrites subsistent et les fractions équivalentes telles que $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$, etc. peuvent être substituées les unes aux autres.

Cette fois-ci, la *division* est toujours possible et correspond à la notion de *rapport* des grandeurs mesurées. Mais la notion de *division à quotient entier avec reste* subsiste et garde son importance : ainsi, pour $\frac{14}{5}$ à diviser par $\frac{4}{5}$

$$\frac{14}{5} = (\frac{4}{5} \times 3) + \frac{2}{5}$$

EXTENSION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES. Comme l'on sait, des situations plus complexes conduisent à introduire d'autres nombres : nombres relatifs à une convention de sens (positifs et négatifs), nombres irrationnels (tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$). Nous disons que ce sont encore des nombres parce que les structures déjà indiquées sont valables. De plus nous disons avoir fait *des extensions* parce que nous confondons, par exemple, 3, $\frac{3}{1}$, (+ 3) qui jouent exactement le même rôle dans leurs ensembles respectifs.

N'oublions pas de souligner l'importance des *éléments neutres*, ceux qui n'agissent pas :

pour l'addition : $0, \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots, 0$

pour la multiplication $1, \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots, (+1)$.

Nous arrêtons ici cet aperçu de ce qu'est l'ensemble des nombres. Nous devons comprendre les difficultés de l'enfant. Nos efforts pour ne présenter à l'enfant que des situations simples ne peuvent empêcher une zone inquiétante non élucidée autour de ce que nous explorons. Soyons meilleur mathématicien que l'enfant et nous pourrons le guider, éviter les écueils et dire au bon moment le mot qui éclaire et rassure.

A. DUBOUQUET

La notion de problème

Le problème, exercice passionnant, demande à l'enfant, après une lecture intelligente, un premier effort pour comprendre la situation décrite dans l'énoncé et d'autres efforts pour arriver à dénouer la situation exposée, faire les calculs et rédiger la réponse.

L'expérience prouve que les petits enfants peuvent se passionner pour des problèmes.

Pour expliquer l'enrichissement que l'enfant peut trouver dans la résolution des problèmes, et les précautions à prendre pour qu'il parvienne au résultat cherché, nous prenons comme exemple un petit ouvrage actuellement épuisé (en voie de réimpression), « Les Cent problèmes du Petit-Poucet ».

Ces problèmes concernent des situations dans lesquelles tout enfant de 5 à 7 ans peut se reconnaître.

Au départ, le « Petit Poucet » était seulement « ce petit enfant qui, au moyen de quelques cailloux blancs trouve son chemin tout seul dans la grande forêt du calcul... » Petit Poucet, grâce à Lucienne Félix, est devenu un camarade et un conseiller pour les autres petits enfants.

Comme une petite histoire

Chacun de ces problèmes est annoncé par un titre, comme une petite histoire, pour que l'enfant sache immédiatement de quoi il s'agit, et accompagné d'un dessin qui est un commentaire schématique de la donnée. Le titre et le dessin viennent au secours du lecteur débutant.

Ces cent problèmes dont aucun résultat ne dépasse 10 pour *les 25 premiers, dont aucun résultat ne dépasse 24 pour les 75 autres ont été imaginés et mis au point avec des enfants.*

A un âge où la lecture des enfants a besoin d'être exercée pour qu'ils arrivent à « comprendre » du premier coup d'œil ce qu'ils lisent, ces problèmes seront aussi des exercices de lecture silencieuse.

En écrivant ou en dessinant *leur réponse, les enfants feront la preuve qu'ils ont lu et compris le texte. Pourquoi leur demander de dessiner ? Pour que les uns y découvrent une aide dans la recherche de la solution et les autres une « vérification » de la solution trouvée spontanément. Le dessin, activité naturelle, tient le rôle d'un simple instrument de travail du petit enfant, venant tout de suite après l'emploi de bûchettes ou de tous autres menus objets à compter. Le dessin fera la transition entre les opérations manuelles sur les objets concrets et les opérations arithmétiques sur les nombres.*

Un graphique de production

Petit Poucet conseille au jeune écolier de marquer lui-même par deux signes ou deux couleurs différentes les numéros des problèmes qu'il aura résolus et ceux dans lesqels il aura fait des erreurs.

Ce dessin de cent cases avec les remplissages au crayon de couleur des cases représentant le travail accompli, donnera l'idée d'un premier graphique de production. Certains écoliers auront peut être l'idée de faire un « planning », c'est-à-dire de décider par avance du nombre de problèmes qu'ils voudront essayer de faire chaque jour.

Je parle de ce « planning » par expérience. Au cours de ma scolarité, je fus transférée dans une classe dont le niveau en mathématiques était plus élevé que le niveau de la classe où j'avais fait mes débuts. A la fin d'une année « démoralisante » en mathématiques, je me décidais à faire tous les problèmes du livre de calcul de cette année là et à acheter le livre du Maître pour me corriger moi-même. Mon « planning » je m'en souviens, prévoyait dix problèmes par jour.

Ce simple auto-traitement me fit passer de la queue de la classe à la tête. Cette expérience personnelle est à l'origine du système de réponses et de solutions mises à la disposition des enfants dans les Cent Problèmes du Petit Poucet.

Pour éviter toute crainte

On a cherché à éviter grâce aux petits nombres, la peur des opérations longues dans lesquelles on peut « faire des fautes », cette peur qui empêche l'enfant de raisonner et de réagir avec bon sens devant une situation mathématique.

La peur de se tromper est évitée par un artifice bien simple : l'enfant est prévenu qu'il trouvera les réponses et les solutions soit à la fin du livre, soit sur des fiches. La suite des réponses sans solution est donnée avant la suite des réponses avec solution afin que l'enfant qui a réussi son problème sans pouvoir expliquer comment il y est parvenu puisse comparer sa réponse avec celle du livre.

Pour encourager l'effort

Il est important que l'enfant devant un problème se tienne dans l'expectative, et ne se dise surtout pas que pour le réussir, il suffira « de faire comme pour celui d'avant ». A cet effet, l'ordre proposé n'aligne pas des séries de problèmes qui se résolvent par la même opération.

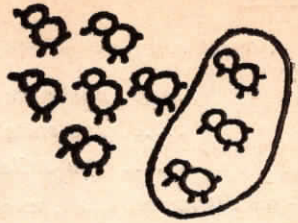
Les solutions du Petit Poucet

La confrontation par l'enfant de la solution qu'il a trouvée avec la solution ou les solutions du Petit Poucet est un travail qui est aussi important que celui qui a consisté à « faire le problème ».

Toutes les structures qui ont été mises en évidence pour le lecteur de cette revue, dans la première partie et dans l'étude du nombre, sont concrétisées dans les schémas que proposent les solutions.

***

Dans un des problèmes, il est question d'une petite fille qui surveille ses 9 poussins. Elle s'aperçoit qu'il en manque. Il n'y en a plus que 6.

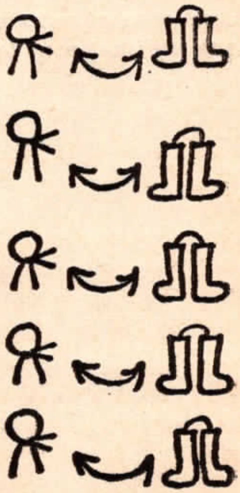


$$9 - 6 = 3$$

il manque 3 poussins.

⁂

Dans un autre problème, il s'agit de compter des chaussettes. Voici la solution de Poucet :



$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

cela fait 10 chaussettes en tout.

Mais Petit Poucet a reconnu la multiplication, il écrit :

$$\mathbf{2 \times 5 = 10}$$

cela fait 10 chaussettes en tout.

*Voici, pour donner un dernier exemple, une **histoire de seaux** d'eaux.*

Poucet a trouvé plusieurs solutions :

...... une suite d'additions

...... une suite de multiplications,

...... une suite de soustractions...

ou s'il la reconnaît, une division.

⁂

Chaque petit problème si simple soit-il est riche en structures.

Il faut certes enseigner la technique du calcul, mais ce n'est qu'une partie de la tâche. Le mécanisme automatique du calcul, dont nous n'avons pas parlé ici est indispensable mais ce n'est pas suffisant pour la formation mathémathique.

L. FÉLIX

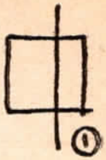
CHAPITRE II

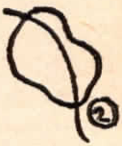
L'ESPACE

La construction de l'espace est liée à la notion de corps solides mobiles. C'est une conquête du toucher, du sens des attitudes et du mouvement. Il semble bien que, pour l'enfant de notre civilisation, le cube soit un élément particulièrement précieux : le cube, vu de face, respecte notre besoin du plan de symétrie fondamental : plan vertical de symétrie de notre visage.

La verticale est longtemps direction privilégiée : l'espace n'est pas isotrope. Les piles de cubes donnent l'idée de la droite avec un repérage par les entiers. Les couches de cubes, puis la superposition de ces couches ne laissent aucun doute : l'espace est à trois dimensions et l'on y retrouve les structures algébriques de l'entier : la compréhension de la commutativité du produit, $3 \times 4 = 4 \times 3$, par des objets mis en rectangle, de préférence des cubes en contact, est-ce de l'algèbre des entiers ou de l'algèbre de la géométrie ?

Mais l'enfant, habitué à voir les grandes personnes utiliser du papier et des crayons, invente très tôt une correspondance entre les objets de l'espace et ses dessins : « Ça, c'est la maison, ça c'est moi, » etc. Les lois de la correspondance sont évidemment très vagues, mais l'intention est d'abord, non pas de respecter la métrique (distances et angles), mais de respecter *la topologie*, c'est-à-dire les régions fermées distinctes et les lignes ouvertes. On peut aisément répéter les expériences de Piaget :





A quatre ans, un enfant invité à copier le dessin (1) fait sans hésiter (2) qui est topologiquement équivalent. De même le chapeau posé *sur* la tête du bonhomme est topologiquement correct : le chapeau ne coupe pas la tête. « Mais les cheveux devraient être cachés ! » — « Sans doute, si le dessin représente ce que l'on voit actuellement dans une position déterminée. Est-il interdit de faire une autre convention et n'est-ce pas aussi respecter la réalité que dessiner ce qui existe même si je ne le vois pas ? » N'exagérons pas. Il n'y a pas là chez l'enfant une science, une technique consciente, codifiée ! Mais il n'y a pas non plus méconnaissance du rôle du dessin pour représenter les objets de l'espace à trois dimensions. Il n'y a qu'impuissance à inventer des lois précises.

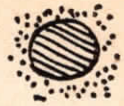
Nous voudrions seulement ici indiquer l'existence de l'*algèbre*, mais aussi de la *topologie* dans l'étude de l'espace.

Algèbre ? évidemment, toutes les notions que nous avons introduites plus haut se retrouvent : ensembles variés de points, de courbes, de couples de points et de segments, de triplets de points et de triangles, avec les opérations d'intersection et de réunion.

Le nombre aussi s'introduit, trop exclusivement du reste dans l'enseignement traditionnel : la mesure attache un nombre à des classes de segments équivalents (superposables), des surfaces équivalentes (découpées en morceaux respectivement superposables), etc.

Mais, en outre, une autre science est nécessaire : la *topologie*, si fondamentale que l'enfant en a l'intuition dès son plus jeune âge mais que nous oublions d'enseigner comme si elle était évidente : N'est-ce pas la même situation psychologique que nous avions aperçue en ce qui concerne les structures algébriques ?

Donnons seulement quelques exemples : sur le papier, dessitions une courbe fermée : nous reconnaissons une *région intérieure* et une *région extérieure* dont la courbe est *frontière* commune. Mais faisons de même sur la surface d'un anneau : pour certaines courbes fermées il n'y a pas séparation entre deux régions. C'est donc que la surface de notre papier, même s'il était élastique et flexible, n'aurait pas la même structure que la surface de l'anneau.



A ces possibilités de régionnement sont étroitement liées des idées de connexité, de *continuité :* l'insecte qui se meut à l'intérieur d'une région fermée peut passer partout sans sauts et sans atteindre la frontière, tandis qu'il doit passer par la frontière pour arriver à l'extérieur. Ici, le mot « intersection de deux lignes » signifie non seulement « élément commun » comme en algèbre, mais encore passage d'une région à une autre.

Des régions contenant un point dans leur intérieur sont des *voisinages* du point ; on peut alors préciser la notion de « points voisins ». De même on peut parler de voisinage de droites jusqu'à une définition scientifique de la *tangente* à une courbe.

Ce besoin de continuité, qui semble bien d'origine mécanique plus encore que géométrique, réagit sur les ensembles de nombres ; elle a exigé l'introduction, non seulement des fractions, mais aussi des nombres irrationnels.

Pour donner une définition de la surface d'une région non polygonale, par exemple de l'intérieur d'un cercle, ou de la longueur d'une ligne courbe, il faut introduire des *limites* dans les configurations et des nombres nouveaux (tels que π) dans l'ensemble des nombres.

Ainsi, qu'il s'agisse des nombres ou de l'espace, l'algèbre est complétée par la topologie. Nous sommes ainsi de nouveau devant l'idée que nous voulions illustrer : l'unité de la mathématique.

A. DUBOUQUET

L'ESPACE POUR LES PETITS

Dans le déroulement de la vie quotidienne, l'enfant mani-pule *des « solides ».... cailloux, haricots, cubes... il en construit : pâtés de sable, boules de terre glaise, châteaux-forts sur une plage ou dans un bac à sable... enfin il construit des solides imaginaires lorsqu'il dit, en faisant quelques gestes... « ceci est ma maison, voici les murs... le plafond... le toit... »*

⁂

On peut considérer d'abord un espace local et borné où l'enfant joue et dans lequel il déplace des solides, réalisant toutes sortes de combinaisons... constructions de cubes, enfilage de perles, jeux de la maison de poupée... du train mécanique... Cet espace qui va en augmentant à mesure que l'enfant grandit sera délimité par le « parc », la chambre, la salle de séjour.

⁂

Dans les jeux dits de « plein air » réalisés dans un espace plus vaste dont le cadre est un jardin, une cour de récréation ou une ruelle, les éléments, les « pions » sont les enfants eux-mêmes comme dans le jeu des quatre coins ou celui de cache-cache.

⁂

A mesure que l'horizon de l'enfant s'éloigne, l'espace n'est plus limité par des murs, des barrières ou des haies, c'est un terrain vague, une prairie ; espace limité seulement par un plan de base, le terrain d'envol de l'aéroport.

Dans cet espace vide, mais physique, toutes les réalisations sont permises à condition d'obéir aux lois de la pesanteur... lois *qui se font respecter d'elles-mêmes si le centre de gravité de l'élément fabriqué ou manipulé n'est pas convenablement situé par rapport à sa base de sustentation. Dans cet espace vide l'enfant fait œuvre d'artiste, de créateur.*

Il y a aussi un espace non euclidien, non physique, dans lequel l'enfant construit des édifices imaginaires... et les habite ! Schwartz-Bart dans « Le Dernier des Justes» décrit une synagogue bondée de réfugiés dans laquelle un « terrain » délimité par un trait représente le lot de chaque famille. Pour jouer le jeu correctement les enfants font semblant de cogner sur des portes ou des parois imaginaires pour entrer chez le voisin. L'espace imaginé n'a pas besoin d'avoir un terrain de base et les lois de la pesanteur peuvent y être transgressées. Dans cet espace il n'existe aucune sanction, c'est le domaine de l'esprit.

Après une initiation si riche, si complète, pourquoi voyons-nous tant d'adolescents ayant perdu le sens de l'espace, complètement déroutés par les sciences qui s'y rapportent.

De même que l'enfant quittant le niveau élémentaire perd le contact avec le réel à cause de la technique du nombre, de même il perd la notion presque manuelle des formes, parce qu'il ne fait plus que des problèmes de volumes en appliquant des formules.

***

L'espace déterminé par des mobiles et objets articulés

L'enfant qui joue à la balle lance une petite sphère de caoutchouc qui suit mille trajectoires... elle roule sur le plan de base « par terre », elle décrit des trajectoires dans l'espace lorsqu'elle part de la main de l'enfant heurte un mur et revient, décrivant une autre ligne.

Avec le meccano l'enfant construit des volumes suggérés par quelques barres. Il construit s'il le veut des corps géométriques rigides ou déformables avec des éléments standard.

Avec la terre glaise l'enfant réalise des solides de toutes formes... Le modelage est très utile pour l'apprentissage de la géométrie, il complète la construction par éléments.

Un espace à quatre dimensions

Les schémas que l'enfant esquisse avec des... petits wagons, des caisses à savon mises sur roulettes, des ailes de moulins, des grues mécaniques, des manivelles... familiarisent l'enfant avec un univers à quatre dimensions à cause de la coordonnée « temps ».

Dans cet espace non rigide l'enfant fait des expériences qui pourraient lui être fort utiles si on l'aidait à comprendre leur importance.

Nous ne pensons pas, par exemple, à aider l'enfant à concevoir un jour que les cordes de la balançoire déterminent des plans parallèles lorsque la balançoire est mise en mouvement... que la planchette, siège de la balançoire, détermine des plans tangents qui enveloppent une portion de cylindre...

Nous ne pensons pas au « modèle » géométrique que représente une porte ou une fenêtre qui s'ouvre et se ferme... Le plan de la porte perpendiculaire au plan du sol décrit une infinité de plans perpendiculaires au sol lorsqu'elle tourne autour de l'axe vertical déterminé par les gonds.

Aspects d'un apprentissage pratique de la géométrie dans l'espace

Nous pourrions intituler ces quelques lignes : « A coups de couteau... » Pourquoi ? Parce que notre couteau de table lorsqu'il « découpe » les nourritures solides qui sont devant nous, relie la géométrie dans l'espace et la géométrie plane, deux disciplines inséparables. La balle, la bille, la boule, l'orange représentent un volume familier : la sphère. L'orange coupée en deux parties révèle des surfaces circulaires, et rien que des surfaces circulaires. Le camembert coupé par un plan vertical passant par son axe révèle des rectangles. Le camembert coupé par un trait de couteau parallèle à l'une de ses faces circulaires révèle des cercles. Si le trait de couteau n'est pas parallèle aux faces circulaires la figures géométrique obtenue sera une ellipse... Mystère des intersections de solides par des plans !

L'espace et sa représentation sur un plan

L'enfant qui dessine s'essaie à représenter le monde tel qu'il est. Il dessine une automobile en indiquant un châssis entouré de ses quatre roues. Il dessine une route bordée d'arbres en représentant les arbres rangés à plat de chaque côté de cette route.

Plus tard à l'imitation des adultes, et sous l'influence des illustrations et de la photographie, il s'efforce d'interpréter les lois de l'optique que nous désignons sous le vocable de perspective.

L'espace coloré

La vision des couleurs accuse la différenciation des plans et des parties d'objets qui ne sont pas monochromes. elle permet de saisir d'un coup d'œil la structure de corps composés.

La vision des choses est rehaussée par la couleur qui donne des renseignements supplémentaires concernant la texture des objets et la matière dont ils sont faits, et aussi concernant la distance qui nous sépare de ces objets.

L'espace sonore

L'enfant aveugle nous ouvre un espace d'une qualité partilière ou plutôt d'une « définition» particulière, c'est l'espace sonore. Ce n'est plus une balle qui va et vient, ou un instrument de mesure que l'on reporte, ou un fil à plomb que l'on tient dans le vide. Ce sont les vibrations sonores qui heurtent les parois et reviennent vers vous, se croisent, forment des échos... et finalement permettent à l'enfant privé de vue de construire mentalement l'espace clos dans lequel il se trouve.

D'une certaine façon les vibrations sonores transposent les formes des pièces d'habitation dans lesquelles on se trouve.

En pleine nuit dans une grande ville, l'aveugle « voit » beaucoup moins bien que le jour à cause de la terrible barrière du silence.

L'espace manuel

Nous nommerons espace manuel celui qui est à tous... à ceux qui voient comme aux aveugles, à ceux qui entendent comme aux sourds, à ceux qui voient et entendent, comme aux sourds-muets-aveugles.

Nous avons interrogé Serge Guillemet à ce sujet. Voici sa réponse :

Dans l'éducation des petits enfants aveugles, l'apprentissage de l' « espace » joue un très grand rôle, et même un rôle vital. Le petit enfant privé du secours de la vue est obligé de se construire un « espace mental » absolument conforme à la réalité. C'est un espace en vraie grandeur et non déformé par la perspective.

« Qu'est-ce que l'espace pour les aveugles ? C'est ce qui permet le déplacement que l'on fait pour embrasser un objet. Et la notion d'angle se relie à un changement d'orientation d'un plan. Pour l'enfant aveugle la réalité de la géométrie dans l'espace précède toute conception de la géométrie plane, car cet enfant travaille en se servant d'objets et non pas d'images. Il explore la forme des objets et apprend à connaître les distances qui séparent les objets.

En offrant à l'enfant aveugle des modèles réduits représentant des objets réels trop grands pour être explorés à la main, il est très important de préciser à quelle échelle ces objets ont été réduits.

Comment l'enfant peut-il se représenter la hauteur des tours de Notre-Dame de Paris ? Il lui faut pour cela gravir cette distance. Pour construire mentalement l'espace où sont les tours, il lui faut agir. L'espace-déplacement est matérialisé par l'effort que l'on fait pour le décrire, dans la réalité.

Et la perspective ? L'enfant aveugle ne peut l'imaginer. Il doit la raisonner... Il lui faut apprendre ces errements de la vue qui font qu'un rond, en perspective, n'est plus un rond, mais une ellipse.

La préparation au calcul des volumes dans le cadre du système métrique est effectuée grâce aux rangements incessants que *l'enfant doit faire pour retrouver son matériel de cubes. Il range ses cubes dans des boîtes. S'il y a dix cubes le long des arêtes du fond de la boîte et dix étages de cubes cela en fait mille. Si ces cubes ont un centimètre d'arête, l'intérieur de la boîte représentera un volume d'environ un décimètre cube. En abordant le système métrique l'enfant se souviendra des rangements de cubes qu'il aura faits tant de fois. »*

CHAPITRE III

MATHÉMATIQUE, GRAMMAIRE ET LOGIQUE

L. FÉLIX

Nous avons vu quelles sont les notions fondamentales et les mots qui les expriment en *mathématiques*, mais en notant que ce sont aussi des notions *logiques*. La pensée s'exprimant dans la langue, ces structures sont aussi celles que la *grammaire* codifie.

De même que l'enseignement des mathématiques suppose que l'enfant ait de nombreuses connaissances fournies par l'expérience, l'enseignement de la grammaire suppose que l'enfant sache manier la langue. Pour le professeur de mathématiques, l'acquisition des moyens d'expression est plus un moyen qu'un but.

Une histoire racontée, au lieu d'un matériel manié, est maintenant notre matière première. L'analyse en est bien difficile à exprimer. L'analyse logique n'est pas à la portée du jeune enfant. Mais un petit texte lu dans un but précis peut être indistinctement une préparation à la grammaire, à la mathématique et à la logique.

Une histoire introduit des *noms*, noms communs, noms propres. Elle décrit donc des ensembles et désigne des éléments de ces ensembles. Un mot isolé, comme « graine », exprime une idée très générale, un ensemble difficile à concevoir, mais si un jardinier nous dit qu'il va, cette semaine de mars, semer ses graines, nous pouvons discuter avec l'enfant : Quelles graines ? Ainsi l'on définira clairement l'ensemble de référence : ou bien énumérer les étiquettes à utiliser (carotte, chicorée...), ou bien utiliser une définition (Que sème-t-on en mars ?).

L'ensemble le mieux connu et en même temps le plus riche de structure est évidemment *la famille*. Le nom propre peut représenter un individu, élément de l'ensemble, ou bien aussi collectivement cet ensemble (montée dans l'échelle des types). Que l'on songe à toutes les structures à mettre en évidence en employant les mots mère, père, enfant, frère, sœur, cousin. Comment comprendre nettement ce qu'est « la fille du frère de la mère de mon père » sans un schéma analogue à ceux qu'utilisent les mathématiciens. C'est ici un arbre généalogique.

Les *adjectifs qualificatifs* permettent de caractériser des sous-ensembles puisque toute qualité, être bleu par exemple, peut être prise comme principe de classification. Inversement, une répartition des objets en classes permet d'attribuer une marque à chaque classe, une couleur, par exemple le bleu.

Nous rappelons que la *conjonction de deux qualités* correspond à l'*intersection des sous-ensembles* : double aspect de la logique du mot *et*. De même pour le mot *ou*. Les conjonctions sont des petits mots avec lesquels les enfants devraient faire bien des exercices.

Les *adjectifs possessifs* indiquent des relations, par exemple des relations de parenté. Nous savons combien est grave la lacune que présente ici la langue française : « Jean remercia son frère et prit son chapeau. » Le chapeau de qui ? La logique, les mathématiques ne peuvent se satisfaire d'une situation ambiguë. L'écrivain non plus, naturellement, mais l'art d'écrire est bien difficile. Un petit schéma éclaire si bien la situation !

N'insistons pas sur les abjectifs numéraux. Ils sont trop évidemment liés aux notions de nombre ordinal ou cardinal.

L'*adjectif démonstratif* désigne un élément de l'ensemble de référence. Sans un geste comment le reconnaître ? l'élément est déterminé par une phrase de définition ; en mathématique on lui donne un nom (le nombre a, le point A. L'inconnue x est un nombre encore inconnu, mais qui garde sa valeur encore mystérieuse tout du long du problème).

L'*adjectif indéfini* a une importance capitale. Tous, aucun, plusieurs... Ce sont les *quantificateurs* que la langue exprime avec tant de nuances ! tout chien, chaque chien, tous les chiens, quel que soit le chien, au moins un chien... Comment la logique et la mathématique, par un appauvrissement, un abandon des nuances, arrivent-elles à abstraire les notions essentielles ? nous savons qu'il suffit de deux symboles $\forall$ et $\exists$ pour les besoins les plus courants.

Et les *pronoms personnels ?* je compte, tu achètes, il partage... qu'importe qui fait l'opération pour le mathématicien ? Il faut dépersonnaliser la situation pour la mettre en équation ! Mais pour que l'histoire soit comprise il ne faut pas la priver de son contenu affectif ; il faut que l'enfant soit pris au jeu. En fait, les problèmes posés sont des saynètes jouées à deux ou trois personnages, mais il ne faut pas tricher ! C'est la *morale* qu'exige ici l'initiation mathématique. Honnêteté d'esprit, condition nécessaire à l'apprenti mathématicien !

Le *pronom interrogatif* exige une réponse. Il caractérise l'élément *problème* qui, pour l'enfant, est plus compréhensible que l'élément *théorème* lequel a sa place dans l'édification de la science dans son ensemble. Mais devant une situation, c'est à l'enfant de découvrir quelles interrogations sont opportunes.

N'insistons pas sur le *verbe* qui fait évoluer la situation, change la partition des ensembles, définit et modifie les relations. Rappelons les méfaits du verbe « être » qui a trop de sens vagues, de même que le verbe « faire » et le pauvre « on a » qui n'a aucun sens précis. Il n'est jamais trop tôt pour exiger qu'un verbe expressif et adéquat soit employé. C'est la seule manière de s'élever au niveau des idées claires.

Evidemment, ce qui importe pour l'accession au niveau logique, c'est de savoir lier les idées, utiliser les *conjonctions de coordination*. A quel âge l'enfant commence-t-il à donner un sens précis au mot « donc » ? Comment comprend-il les deux phrases : « Je tournais le dos, je n'ai rien vu » — « Je ne travaille pas au jardin, il pleut ». La première demande « donc » et la seconde « car, parce que ». Avant de savoir utiliser le mot propre, l'enfant saura dessiner dans le bon sens les flèches doubles $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$. Plus difficile est l'emploi de la flèche $\Leftrightarrow$

d'équivalence logique. La langue est souvent maladroite pour exprimer ceci : nécessaire et suffisant ; si et seulement si ; il faut et il suffit.

La preuve que le schéma logique est plus clair que l'expression logique, c'est que bien des grammaires modernes usent de schémas pour analyser les fonctions des mots et des propositions ; elles usent aussi de couleur : leur étude est tout à fait comparable à la mise en forme des démonstrations mathématiques.

Certes, la langue doit exprimer bien autre chose que les structures logiques. L'algèbre de la pensée n'est qu'un squelette qui supporte toutes les nuances de l'affectivité. Les qualités d'harmonie, le pouvoir évocateur, la poésie du style, nous n'avons pas à les étudier ici ; nous n'avons considéré que les exercices de thèmes et versions qui traduisent en langue vulgaire les structures mathématiques et logiques que nos symboles techniques savent représenter en quelques signes : le code, le mode d'emploi, la règle du jeu nécessitent une langue parfaite.

***

On trouvera une première réalisation de l'introduction parallèle de la grammaire et des mathématiques pour les jeunes enfants dans la collection Amélie Dubouquet : parallèlement à l' « **Histoire de Monsieur Fève, le jardinier** », qui est une petite étude de grammaire, la série **l'Enfant mathématicien** présente « **Dans le jardin de Monsieur Fève** », introduction aux structures mathématiques, par **Lucienne Félix.**

***

Un exposé plus détaillé et plus complet des idées exprimées dans la première partie concernant l'algèbre et la topologie est l'objet d'un petit livre destiné aux instituteurs et professeurs :

Mathématiques modernes $\cap$ Enseignement élémentaire
par Lucienne FÉLIX

(Editions A. Blanchard, 9, rue de Médicis, Paris 5e) 1960, 12 NF.

Sur les relations d'équivalence et d'autres sujets, on pourra se reporter au n° 21 des **Cahiers pédagogiques,** consacré à l'enseignement des mathématiques.

(15 mai 1960).

(S.E.V.P.E.N., 13, rue du Four, Paris 6e).

A. DUBOUQUET

L'esprit logique du petit enfant

Les structures logiques apparaissent plus ou moins tôt chez les enfants.

Voici un exemple de logique concernant une observation faite dans le domaine verbal, par une petite fille de quatre ans.

« Comme tu as bonne mine aujourd'hui Isabelle... »
dit une grande personne.

« Alors tu me trouves lote... ?

« Comment... lote... ? »
dit la grande personne qui ne comprend pas.

« Parce que l'autre jour tu m'as dit... tu as mauvaise mine, tu es pâlote... »

Voici Martin, quatre ans, demandant à son père de mettre sur le grammophone un disque qu'il aime particulièrement (« Bancs publics », de Brassens).

« Non ! » dit le Père

« Ce disque n'est pas pour les enfants. »

« Alors ? » dit Martin en montrant son père et deux autres adultes...

« Alors... mettez-le pour vous... »

La mémoire et les mathématiques

Le petit enfant a une mémoire délicate, apte à saisir ce que les grandes personnes saisissent parfois moins rapidement. Il a par exemple des aptitudes extraordinaires à apprendre une langue étrangère. Si l'on veut que sa mémoire en mathématique *soit étayée par des symboles que l'on réservait jusqu'ici aux « grandes classes » on s'apercevra qu'il assimilera ces symboles avec une grance facilité.*

Grâce aux solutions dessinées du Petit Poucet la mémoire de l'enfant pourra se structurer en classant des schémas.

L'esprit d'observation et les mathématiques

L'enfant démonte ses jouets et même, lorsque le jouet résiste il le casse...

Les grandes personnes crieraient aisément au vandalisme.

Que fait l'enfant qui démonte ou qui casse ? Il cherche instinctivement les structures.

L'invention

L'un des livres de l'Enfant mathématicien, s'appelle « Les dix mille problèmes du dictionnaire-aux-mille-images »

Il s'agit là de l'exercice de l'invention. Il s'agit de composer des problèmes extrêmement variés en partant de l'objet.

L'invention est le départ pour un terrain neuf ou renouvelé. Elle demande du bon sens, de la logique et un esprit créateur. L'enfant peut aussi bien inventer de nouvelles trames de problèmes, qu'imaginer de petites histoires, ou réaliser des œuvres peintes ou modelées ou créer un art dramatique.

Permettre à l'enfant de rédiger les aventures mathématiques de son esprit n'est pas une petite chose. C'est un agent de formation.

La culture artistique

L'invention nous conduit vers la création artistique et celle-ci vers l'architecture et la musique. L'une et l'autre expriment la mathématique, l'une dans l'espace rythmé par les colonnes ou autres structures mesurées, l'autre dans le déroulement du temps rythmé par les notes de musique.

Les pas, les battements de mains et les mouvements et dépla-

cements de la danse chantée à laquelle les petits enfants sont tellement sensibles, réunissent dans une même trame les mathématiques de l'espace et du temps.

*
* *

Un dernier mot

Nous n'avons pas parlé de la formation des mécanismes : table d'addition, table de multiplication, ni de la technique des opérations. — Leur importance est évidemment très grande. L'objet de notre étude était différent.

SUJET DE RÉFLEXION

Ce qu'il faut, c'est donner à l'enfant du temps pour penser, avec l'habitude de la réflexion. Que la radio s'arrête quand on travaille. Que la TV ne soit pas de tous les repas et le « ciné » de tous les jeudis.

Ces techniques audio-visuelles, pour précieuses qu'elles soient, vont trop vite pour qu'on fasse attention.

Une des vertus de la lecture cultivée, c'est d'être lente ; ce n'est pas l'aptitude à dévorer un livre à la cadence d'un « western » effréné.

Nous craignons fort que la désaffection des hommes d'aujourd'hui pour la littérature, au profit du reportage, des « choses vues », des périodiques d'information et de vulgarisation soit une maladie de l'attention intellectuelle.

L'attention factice du bon élève, les bras croisés, peut fort bien dissimuler une rêverie, une évasion désordonnée de l'esprit.

C'est pourquoi nous croyons à la vertu du travail manuel, pour développer cet aspect particulier de l'intelligence. Tout ce qu'on fait de ses mains exige une tension et une concentration de l'esprit : que ce soit un découpage, un pliage, une sculpture ou un assemblage, on ne peut éluder cette obligation : Faire attention ! Cela se retrouve ensuite dans l'entendement, la logique et les spéculations abstraites.

La présence-d'esprit, c'est véritablement que l'esprit sache être présent.

A. BOEKHOLT.

(*La Vie active*).

VIE DU MOUVEMENT

Une fois de plus, le généreux ami de *l'Ecole Nouvelle Française*, comme il le faisait depuis plusieurs années, nous a fait bénéficier, cette année encore, de sa grande libéralité. Nous ne saurions lui témoigner trop de gratitude à la fois pour une aide matérielle qui nous est très profitable, et pour cet attachement fidèle à notre œuvre qui nous encourage et nous soutient.

⁂

Le dernier numéro de *Murmures*, le journal rédigé par les élèves de « La Source », contient, entre autres, les résultats d'une enquête (avec interviews, s'il vous plaît) sur le théâtre : Que faut-il penser « du théâtre pour les enfants de 8 à 15 ans ? », et le rapport, un peu rapide et schématique, mais vif et amusant, d'un camarade revenu d'un séjour en Angleterre.

⁂

Le dernier ouvrage de M. Cousinet *Pédagogie de l'apprentissage*, vient d'être traduit en italien (*Maestro e Scolare nella lezione*, Rome, Ed. A. Armando, 1960).

NOTICES BIBLIOGRAPHIQUES

G. PRÉVOT, *Pédagogie de la Coopération scolaire*, Coll. Nouvelle Encyclopédie pédagogique, Paris, P.U.F., 1960.

Que ceci ne soit point dit d'abord pour détourner les lecteurs de lire cet ouvrage si dur, et si plein, mais je ne puis pas ne pas dire d'abord que ce que j'en ai le mieux aimé, vraiment aimé, c'est le premier chapitre, avec son titre : « *Ce qu'est une coopérative scolaire authentique* ». Car depuis que Profit a, en 1918, ce que trop d'éducateurs oublient, volontairement ou involontairement, *inventé* la coopération scolaire, aucune invention n'a été plus lamentablement déformée, plus caricaturée. Que la coopérative scolaire soit, comme le rappelle si justement M. Prévot « une société d'élèves, gérée par les élèves, une société *d'élèves*, exclusivement composée *d'élèves*, constituée librement, une petite société démocratique d'élèves, auxquels ne se mêle aucun adulte », bref que la coopérative scolaire soit l'héritière authentique de toutes les tentatives de *self-government* dont Ferrière s'est fait toute la vie l'avocat, voilà ce qui aux yeux de tant de maîtres a si longtemps paru, paraît encore, inadmissible. Le maître à leurs yeux, ce n'est pas « l'ami qui aide », c'est « le chef qui commande ». Si bien que beaucoup d'entre eux, ou se sont refusés à accepter que s'instaure dans leur école une coopérative scolaire, ce qui était fâcheux, ou ont organisé des coopératives scolaires, ce qui était peut-être encore pire.

Heureusement il y a encore, dans l'école, beaucoup de bonnes volontés, et de travailleurs honnêtes. Ceux qui voudront, réellement, tenir dans leur classe, une expérience de coopérative scolaire, trouveront dans l'ouvrage de M. Prévot, tout ce qu'il leur sera utile de savoir et tout ce qu'ils *doivent* savoir : comment on permet aux élèves de constituer une coopérative authentique, quelle aide on leur donne pour qu'elle fonctionne bien, quelle est la technique, la méthodologie même de la coopérative, quels bénéfices de nombreuses expériences montrent qu'on peut en attendre pour la formation morale et civique, pour la compréhension internationale, pour l'éducation toute entière.

Bref, nous considérons la lecture de l'ouvrage de M. Prévot, terminé par une riche bibliographie, comme indispensable aux éducateurs. R. C.

Pour être moniteur de colonie de vacances, Editions Clédor, Paris, 1960.

Il y faut bien des qualités (je ne sais pas si je n'aimerais pas mieux être conducteur d'hommes ou de troupeaux), et il y faut un apprentissage. D'autres ouvrages écrits sur ce sujet, toutes les *œuvres* qui ont entrepris cette tâche, savent combien elle est difficile. Notre ami L. Raillon s'y donne à son tour avec les collaborateurs qu'il a choisis. Pendant la période convenable (un mois, ou deux) le moniteur va vivre avec des enfants qui lui demanderont sans cesse (bien plus qu'à l'école où les nécessités des apprentissages délimitent et précisent la tâche du maître) d'être à la fois un compagnon et un exemple — je dirais presque, surtout un exemple. Il faut donc d'abord qu'il se connaisse bien, avec ses possibilités, ses caractéristiques éducatives (ch. 1 : *Devenir un éducateur*). Il ne faut pas moins qu'il sache de quoi va se composer cette vie de vacances, ce que les enfants pourront faire et ce qu'ils attendront de lui (ch. 3 : *Les activités de loisir*). Sur ces points importants, sur les chances que peut avoir un jeune de devenir, sur ce qu'il doit *savoir* pour être, un bon moniteur, tous ceux qui liront cet ouvrage, y trouveront ce dont ils ont besoin, et dont le nom et les ouvrages antérieurs de M. Raillon leur sont un sûr garant.

R. C.

Imprimerie F. Besnier, La Flèche — Le Gérant : R. Cousinet

L'ECOLE NOUVELLE FRANÇAISE
32, rue du Calvaire, Saint-Cloud (S.-&-O.)